Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

UNIVERSITÄTSKOLLEG

UNIVERSITÄTSKOLLEG: #STUDIUM+

Tutorium Mikroökonomik I:

Aufgabenblatt 2

Dr. Kristin Paetz
Meike Kock

KOSTENLOSE ZUSATZANGEBOTE UND LEHRMATERIALIEN FÜR ALLE STUDIERENDEN

Das Universitätskolleg wird aus Mitteln des BMBF unter dem Förderkennzeichen 01PL17033 gefördert.
Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung liegt bei den Herausgebern und Autorinnen und Autoren.

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung

Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

UNIVERSITÄTSKOLLEG

Tutorium Mikroökonomik I: Aufgabenblatt 2

Ziel: Wiederholung der Regeln der Differentialrechnung
Mathematische Grundlagen: Kapitel 6, 11 und 12 im Buch[1]

Aufgabe 1 (vgl. Kapitel 6) - Bestimmen Sie die erste Ableitung

a) $f(x) = x + 1$

b) $q(p) = \frac{3}{p^2}$

c) $q(p) = \sqrt[3]{p} - \sqrt{p}$

d) $f(x) = ln(x)$

e) $f(x) = (3 + 2x)^4$

Aufgabe 2 (vgl. Kapitel 11.2) - Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung

a) $f(x, y) = x^2 y$

b) $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$

c) $u(x_1, x_2, l) = 2x_1^5 + x_2^2 - l(m - p_1 x_1 - p_2 x_2)$

Aufgabe 3 (vgl. Kapitel 12.5) - Bestimmen Sie die Grenzrate der Substitution
GRS $= -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}}$

a) $u(x_1, x_2) = x_1^3 x_2^2$

b) $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + 2x_2}$

c) $u(x_1, x_2) = ln(x_1) + ln(x_2)$

Aufgabe 4 (vgl. Kapitel 12.5) - Gegeben ist die Nutzenfunktion $u(x_1, x_2) = x_1^{0,3} x_2^{0,7}$

a) Bestimmen Sie die Grenzrate der Substitution GRS

b) Setzen Sie GRS gleich dem negativen Preisverhältnis $-\frac{p_1}{p_2}$ und stellen Sie nach x_2 um

c) Setzen Sie x_2 in die Budgetgleichung ($m = p_1 x_1 + p_2 x_2$) ein und stellen Sie nach x_1 um: Geben Sie $x_1(p_1, p_2, m)$ an

d) Setzen Sie x_1 wiederum in 4.b) ein: Geben Sie $x_2(p_1, p_2, m)$ an

[1] Sydsæter, Hammond und Strøm, Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Pearson, 2015

Zusatzaufgaben

Zu Aufgabe 1 Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung

a) $q(p) = \sqrt{p}$

b) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x^3}}$

c) $f(x) = \frac{3+a}{\sqrt[3]{x}}$

d) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

e) $f(x) = \sqrt[3]{5x+a}$

f) $f(x) = 5ln(x+5)$

Zu Aufgabe 2 Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung

a) $f(x) = 4x^2$

b) $f(x) = ax^{n+1}$

c) $p(q) = 2q^6 + 3q^5 + 10$

d) $u(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^3 + 2x_2^2 + x_3$

e) $P(Q) = 1 + Q^3$

f) $p(q) = q(4q - 2)$

g) $P(Q) = Q^3 + 2Q$

h) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 5x - y$

i) $Q(P_1, P_2) = 6P_1^2 + 5P_1P_2 - 7P_2^2 + 3P_1$

j) $f(x, y) = x^3y - xy^2 - 2(x - 2y) + 1$

k) $f(x_1, x_2) = 5x_1 + 2x_2$

l) $u(x_1, x_2) = 2x_2 + \sqrt{3x_1 + 1}$

m) $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^5 x_2^2}$

n) $u(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2 + x_3^2 + x_3(10 - 2x_1 - 4x_2)$

Zu Aufgabe 3 Bestimmen Sie die Grenzrate der Substitution

a) $u(x_1, x_2) = x_1x_2 + x_2$

b) $u(x_1, x_2) = 10(x_1^{-2} + x_2^{-2})^{-4}$

c) $u(x_1, x_2) = 2x_1^{0,4}x_2^{0,6}$

Zu Aufgabe 4

1) Führen Sie die Schritte der vorherigen Aufgabe 4 durch für:

   i) $u(x_1, x_2) = x_1^3x_2^2$

   ii) $u(x_1, x_2) = \frac{5x_1^2}{x_2}$

2) (vgl. Kapitel 12.5) - Gegeben ist die Nutzenfunktion $u(x_1, x_2) = (x_1x_2)^2$

   i) Skizzieren Sie eine Indifferenzkurve mit dem Nutzenniveau $u = 16$ (Hinweis: Wertetabelle)

   ii) Bestimmen Sie die Grenzrate der Substitution für die folgenden Kombinationen von x_1, x_2 analytisch

      a) $x_1 = 4, x_2 = 1$

      b) $x_1 = 2, x_2 = 2$

      c) $x_1 = 1, x_2 = 4$

   iii) Bestimmen Sie die Steigung der Funktion an den jeweiligen Punkten graphisch

Lösungen

Aufgabe 1

a) $f'(x) = 1$

b) $q'(p) = -\frac{6}{p^3} = -6p^{-3}$

c) $q'(p) = \frac{1}{3}p^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{2}p^{-\frac{1}{2}}$

d) $f'(x) = \frac{1}{x}$

e) $f'(x) = 4 \cdot (3+2x)^3 \cdot 2 = 8(3+2x)^3$

Aufgabe 2

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$

b) $\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{1}{2}{x_1}^{-1/2}$

$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{1}{2}{x_2}^{-1/2}$

c) $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 10x_1^4 + lp_1$

$\frac{\partial u}{\partial x_2} = 2x_2 + lp_2$

$\frac{\partial u}{\partial l} = -m + p_1x_1 + p_2x_2$

Aufgabe 3

a) $GRS = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} = -\dfrac{3x_1^2x_2^2}{2x_1^3x_2} = -\dfrac{3x_2}{2x_1}$

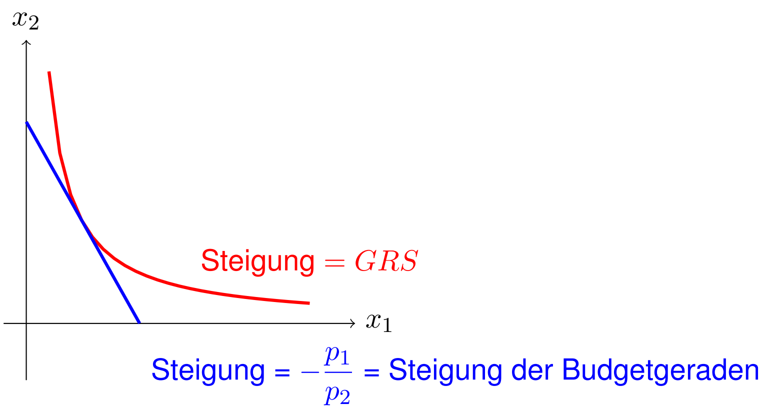
b) $GRS = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} = -\dfrac{\frac{1}{2}(x_1+2x_2)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(x_1+2x_2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2} = -\dfrac{1}{2}$

c) $GRS = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} = -\dfrac{\frac{1}{x_1}}{\frac{1}{x_2}} = -\dfrac{x_2}{x_1}$

Aufgabe 4

a) $GRS = -\dfrac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} = -\frac{0{,}3x_1^{-0{,}7}x_2^{0{,}7}}{0{,}7x_1^{0{,}3}x_2^{-0{,}3}} = -\frac{3x_2}{7x_1}$

GRS gibt an,mit welchem Austauschverhältnis ein Individuum bereit ist, eine marginale Einheit von Gut 2 gegen eine von Gut 1 zu tauschen bzw. wie viele Einheiten von Gut 2 ein Individuum erhalten muss, wenn es auf eine marginale Einheit von Gut 1 verzichtet bei konstantem Nutzen $\bar{u}$).
(Graphisch: Steigung der Indifferenzkurve)



Im Optimum: $GRS = -\dfrac{p_1}{p_2}$

b) $-\frac{3x_2}{7x_1} = -\frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow x_2 = \frac{7p_1}{3p_2}x_1$ in die Budgetgleichung einsetzen

c) $m = p_1x_1 + p_2(\frac{7p_1}{3p_2}x_1) \Leftrightarrow m = p_1x_1 + \frac{7}{3}p_1x_1 \Leftrightarrow m = \frac{10}{3}p_1x_1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3m}{10p_1}$

d) $x_2 = \frac{7p_1}{3p_2} \cdot \frac{3m}{10p_1} \Leftrightarrow x_2 = \frac{7m}{10p_2}$

Zusatzaufgaben

Zu Aufgabe 1

a) $q'(p) = \frac{1}{2\sqrt{p}} = \frac{1}{2}p^{-1/2}$

$q''(p) = -\frac{1}{4}p^{-3/2}$

b) $f'(x) = -\frac{9}{2}x^{-5/2}$

$f''(x) = \frac{45}{4}x^{-7/2}$

c) $f'(x) = -\frac{1}{3}(3+a)x^{-4/3}$

$f''(x) = \frac{4}{9}(3+a)x^{-7/3}$

d) $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$

$f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$

e) $f'(x) = \frac{5}{3}(5x+a)^{-2/3}$

$f''(x) = -\frac{50}{9}(5x+a)^{-5/3}$

f) $f'(x) = \frac{5}{x+5}$
$f''(x) = -\frac{5}{(x+5)^2}$

Zu Aufgabe 2

a) $f'(x) = 8x$

b) $f'(x) = (n+1)ax^n$

c) $p'(q) = 12q^5 + 15q^4$

d) $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 9x_1^2$

$\frac{\partial u}{\partial x_2} = 4x_2$

$\frac{\partial u}{\partial x_3} = 1$

e) $P'(Q) = 3Q^2$

f) $p'(q) = 8q - 2$

g) $P'(Q) = 3Q^2 + 2$

h) $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 5$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 1$

i) $\frac{\partial Q}{\partial P_1} = 12P_1 + 5P_2 + 3$

$\frac{\partial Q}{\partial P_2} = 5P_1 - 14P_2$

j) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y - y^2 - 2$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 - 2yx + 4$

k) $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 5$

$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2$

l) $\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{3}{2\sqrt{3x_1+1}} = \frac{3}{2}(3x_1+1)^{-1/2}$

$\frac{\partial u}{\partial x_2} = 2$

m) $\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{5}{2}x_1^{\frac{3}{2}}x_2$

$\frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1^{\frac{5}{2}}$

n) $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 3x_1^2x_2 - 2x_3$

$\frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1^3 - 4x_3$

$\frac{\partial u}{\partial x_3} = 2x_3 - 4x_2 - 2x_1 + 10$

Zu Aufgabe 3

a)
- $GRS = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} = -\frac{x_2}{x_1+1}$

b)
- $GRS = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} = -(\frac{x_2}{x_1})^3$

c)
- $GRS = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} = -\frac{0,8x_1^{-0,6}x_2^{0,6}}{1,2x_1^{0,4}x_2^{-0,4}} = -\frac{2x_2}{3x_1}$

Zu Aufgabe 4

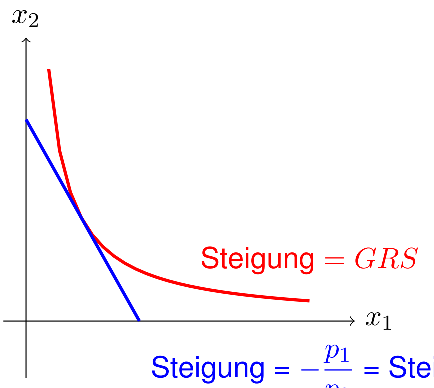
(1)(i)

a) $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 3x_1^2 x_2^2$

$\frac{\partial u}{\partial x_2} = 2x_1^3 x_2$

$GRS = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} = -\frac{3x_1^2 x_2^2}{2x_1^3 x_2} = -\frac{3x_2}{2x_1}$

GRS gibt an,mit welchem Austauschverhältnis ein Individuum bereit ist, eine marginale Einheit von Gut 2 gegen eine von Gut 1 zu tauschen bzw. wie viele Einheiten von Gut 2 ein Individuum erhalten muss, wenn es auf eine marginale Einheit von Gut 1 verzichtet bei konstantem Nutzen $\bar{u}$).
(Graphisch: Steigung der Indifferenzkurve)



Im Optimum: $GRS = -\frac{p_1}{p_2}$

b) $GRS = -\frac{p_1}{p_2}$

$-\frac{3x_2}{2x_1} = -\frac{p_1}{p_2}$

$x_2 = \frac{2p_1}{3p_2} x_1$ in die Budgetgleichung einsetzen

c) $m = p_1 x_1 + p_2(\frac{2p_1}{3p_2} x_1) \Leftrightarrow m = p_1 x_1 + \frac{2}{3} p_1 x_1 \Leftrightarrow m = \frac{5}{3} p_1 x_1$

$x_1 = \frac{3m}{5p_1}$

d) $x_2 = \frac{2p_1}{3p_2} \cdot \frac{3m}{5p_1}$

$x_2 = \frac{2m}{5p_2}$

(ii)

a) $\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{10x_1}{x_2} = 10x_1x_2^{-1}$

$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{-5x_1^2}{x_2^2} = -5x_1^2x_2^{-2}$

$$GRS = -\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial u}{\partial x_2}} = -\frac{10x_1x_2^{-1}}{-5x_1^2x_2^{-2}} = \frac{2x_2}{x_1} = 2\frac{x_2}{x_1}$$

b) $2\frac{x_2}{x_1} = -\frac{p_1}{p_2}$

$x_2 = -\frac{p_1}{2p_2}x_1$

c) $m = p_1x_1 + p_2(-\frac{p_1}{2p_2}x_1) \Leftrightarrow m = p_1x_1 - \frac{1}{2}p_1x_1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}p_1x_1$
$x_1 = \frac{2m}{p_1}$

d) $x_2 = -\frac{p_1}{2p_2} \cdot \frac{2m}{p_1}$

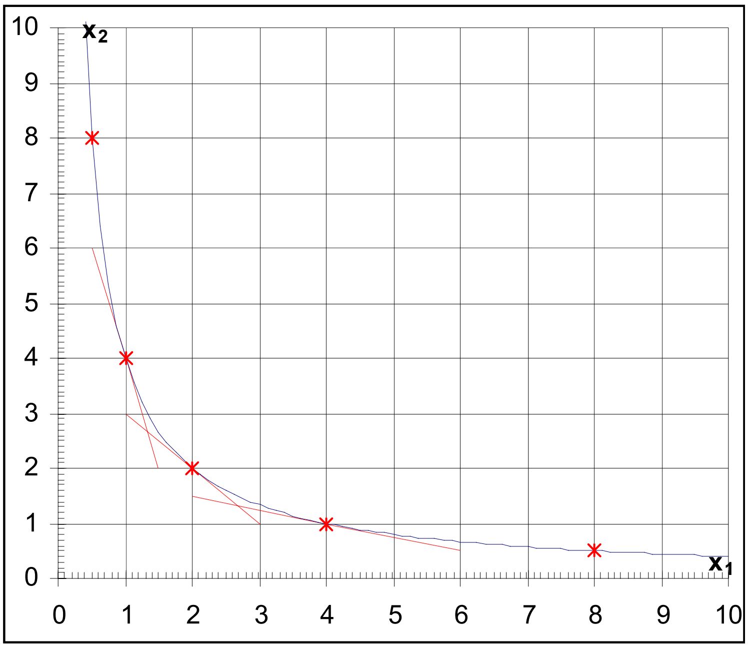
$x_2 = -\frac{m}{p_2}$

(2)

i)
- Setze Funktion gleich Nutzenniveau u und löse nach x_2 auf
  $16 = (x_1x_2)^2$
  $4 = x_1x_2$
  $x_2 = \frac{4}{x_1}$
- Aufstellen einer Wertetabelle für verschiedene Werte von x_1

x_1	x_2
0.5	8
1	4
2	2
4	1
8	0.5

- Trage die Punkte aus (ii.) in ein Koordinatensystem ein und verbinde sie um die Indifferenzkurve zu skizzieren



ii) Es gilt für die Grenzrate der Substitution

$$GRS = -\frac{\frac{du}{dx_1}}{\frac{du}{dx_2}} = -\frac{2x_1x_2^2}{2x_1^2x_2} = -\frac{x_2}{x_1}$$

a) $GRS = -\frac{x_2}{x_1} = -\frac{1}{4}$

b) $GRS = -\frac{x_2}{x_1} = -1$

c) $GRS = -\frac{x_2}{x_1} = -4$

iii) Die Steigung einer Funktion in einem Punkt entspricht immer der Steigung der Tangente an diesem Punkt. In der Abbildung unter a) sind an den Punkten (4,1), (2,2) und (1,4) jeweils Tangenten an die Indifferenzkurve gelegt. Deren Steigung kann man leicht ablesen, sie betragen $-\frac{1}{4}$, -1 und -4 und entsprechen damit genau den ausgerechneten Substitutionsraten.