Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

UNIVERSITÄTSKOLLEG

UNIVERSITÄTSKOLLEG: #STUDIUM+

Tutorium Makroökonomik I:

4. Solow-Wachstumsmodell

Dr. Kristin Paetz
Tobias Fischer

KOSTENLOSE ZUSATZANGEBOTE UND LEHRMATERIALIEN FÜR ALLE STUDIERENDEN

Das Universitätskolleg wird aus Mitteln des BMBF unter dem Förderkennzeichen 01PL17033 gefördert.
Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung liegt bei den Herausgebern und Autorinnen und Autoren.

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung

Tutorium Makroökonomik I: 4. Solow-Wachstumsmodell

Ziel: Kombination des Wissens aus den Tutorien 1-3, um das Solow-Wachstumsmodell nachzuvollziehen

Aufgabe 1 - Solow-Wachstumsmodell

Die Produktionsfunktion einer Volkswirtschaft sei gegeben durch:

$$Y = K^{0,5} N^{0,5}$$

Privat wird ein bestimmter Teil s (Sparquote) vom Einkommen gespart

$$S = sY \quad \text{mit } 0 < s < 1$$

Der andere Teil wird konsumiert

$$C = (1 - s)Y \quad \text{mit } 0 < s < 1$$

Die Investitionen entsprechen der Ersparnis

$$I = S$$

Der Kapitalbestand wird kontinuierlich weniger wert, und zwar um den Faktor δ (Abschreibungsrate).

Wir betrachten im Folgenden alle Größen in Bezug auf die Anzahl der Beschäftigten N. So ist z.B. $\frac{Y}{N}$ die Produktion pro Beschäftigten und $\frac{K}{N}$ die Kaptialintensität (Kapitaleinsatz pro Beschäftigten).

Die Veränderung der Kapitalintensität in jeder Periode ergibt sich aus den Investitionen abzüglich den Abschreibungen (jeweils je Beschäftigten)

$$\underbrace{\Delta \frac{K}{N}}_{\text{Veränderung der Kapitalintensität}} = \underbrace{\frac{I}{N}}_{\text{Investitionen je Besch.}} - \underbrace{\delta \cdot \frac{K}{N}}_{\text{Abschreibungen je Besch.}}$$

1. Zeichen Sie die Abschreibungen je Beschäftigten (1a) in eine Skizze. Bestimmen Sie zunächst formal und zeichnen Sie dann in die selbe Skizze Produktion (1b) und Investition (1c) je Beschäftigten:

   (a) $\delta \cdot \frac{K}{N}$ (b) $\frac{Y}{N}\left(\frac{K}{N}\right)$ (c) $\frac{I}{N}\left(\frac{K}{N}\right)$

2. Bestimmen Sie in Ihrer Skizze den Steady-State. Dies ist der Zustand in dem gilt: Veränderung der Kapitalintensität = 0. Bestimmen Sie sowohl Produktion, Investition, Abschreibungen als auch den Konsum je Beschäftigten an diesem Punkt graphisch

   (a) Das Land habe eine Kapitalintensität, welche geringer sei als im Steady-State. Bestimmen Sie sowohl Produktion, Investition, Abschreibungen und den Konsum je Beschäftigten graphisch

(b) Beschreiben Sie verbal andhand der Graphik welche Prozesse in 2a einsetzen und wohin sie führen

(c) Zeichnen Sie die Ausgangssituation erneut. Wie wirkt sich eine Erhöhung der Sparquote s aus?

3. Betrachten Sie weiterhin die Produktionsfunktion $Y = K^{0,5}N^{0,5}$

   (a) Wie hoch ist die Produktion mit K= 25 und N=9? Wie hoch die Kapitalintensität und die Produktion je Beschäftigten?

   (b) Nehmen Sie eine Abschreibungsrate von $\delta = 9\%$ und eine Sparquote von $s = 20\%$ an. Wie hoch sind die Kapitalintensität, die Produktion und der Konsum je Beschäftigten im Steady State?

   (c) Nehmen Sie einen Anstieg der Sparquote auf ... an, wie verändert sich Ihre Antwort unter 3b?

      i. $s = 30\%$

      ii. $s = 80\%$

   (d) Welche der in 3b und 3c untersuchten Sparquoten erscheint Ihnen gesellschaftlich am wünschenswertesten? Begründen Sie

Zusatzaufgaben

1. Solow-Wachstumsmodell

   (a) Betrachten Sie die Produktionsfunktion aus Aufgabe 2: $Y = K^{0,5}N^{0,5}$

      i. Bestimmen Sie $\frac{\partial Y}{\partial K}$ und $\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2}$ sowie $\frac{\partial Y}{\partial N}$ und $\frac{\partial^2 Y}{\partial N^2}$

      ii. Sind diese partiellen Ableitungen > 0 oder < 0? Wie lässt sich dies jeweils ökonomisch interpretieren?

      iii. Neben den in 1(a)ii analysierten Eigenschaften lassen sich noch die Skalenerträge einer Produktionsfunktion analysieren. Konstante Skalenerträge bedeuten, dass eine Ver-x-fachung (z.B. Verdopplung) aller Inputfaktoren *genau* zu einer Ver-x-fachung des Outputs führt. Formal:

$$x \cdot Y = F(x \cdot K, x \cdot N)$$

      Hat diese Produktionsfunktion konstante Skalenerträge? Wie sähe es mit der Produktionsfunktion $Y = K^{0,5}N$ aus?

   (b) Beziehen Sie sich auf den in Aufgabe 2.2 graphisch bestimmten Steady-State:

      i. Wie wirkt sich ein Anstieg der Abschreibungsrate δ auf den Steady-State aus?

      ii. Wie wirkt sich ein Rückgang der Sparquote s auf den Steady State aus?

   (c) Betrachten Sie die folgenden Produktionsfunktionen

      1. $Y = K^{0,4}N^{0,6}$ 2. $Y = K^{0,6}N^{0,4}$ 3. $Y = K^{0,8}N^{0,2}$

      Es handelt sich hier um Cobb-Douglas Produktionsfunktionen deren Exponenten in Summe 1 ergeben. Allgemein lassen sie sich formulieren als

$$Y = K^{\alpha}N^{1-\alpha} \quad \text{mit } 0 < \alpha < 1$$

      i. Bestimmen Sie die Kapitalintensität im Steady-State $\frac{K^*}{N}$ in Abhängigkeit von den Parametern s, δ und α (Tipp: bestimmen Sie dazu zunächst $\frac{Y}{N}$ in Abhängigkeit von α).

      ii. Bestimmen Sie davon ausgehend $\frac{Y^*}{N}$ und $\frac{C^*}{N}$

      iii. Nehmen Sie eine Abschreibungsrate von $\delta = 11\%$ und eine Sparquote von $s = 30\%$ an. Wie hoch sind Kapitalintensität, sowie Produktion und Konsum je Beschäftigten im Steady State für die drei angegebenen Produktionsfunktionen?

      iv. Welcher Zusammenhang zwischen α und $\frac{K^*}{N}$ lässt sich beobachten?

Zusatzaufgaben - Lösung

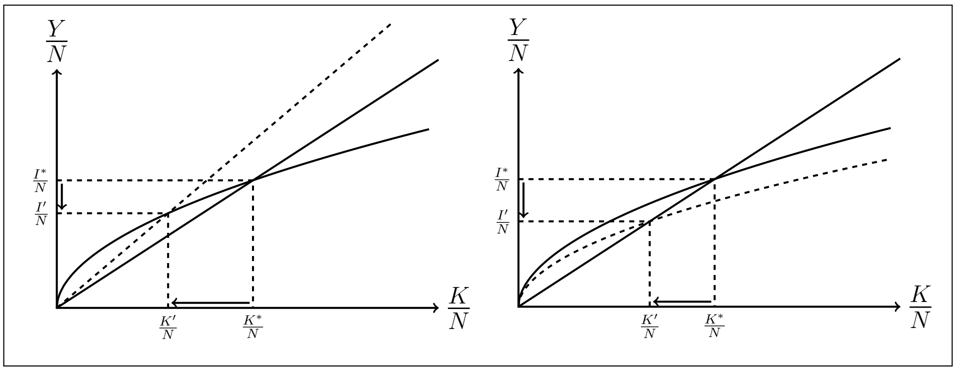
1. Solow-Wachstumsmodell

   (a) i.
   - $\frac{\partial Y}{\partial K} = 0,5K^{-0,5}N^{0,5} = 0,5\sqrt{\frac{N}{K}}$ $\quad \frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = -0,25K^{-1,5}N^{0,5} = -0,25\sqrt{\frac{N}{K^3}}$
   - $\frac{\partial Y}{\partial N} = 0,5N^{-0,5}K^{0,5} = 0,5\sqrt{\frac{K}{N}}$ $\quad \frac{\partial^2 Y}{\partial N^2} = -0,25N^{-1,5}K^{0,5} = -0,25\sqrt{\frac{K}{N^3}}$

   ii.
   - $\frac{\partial Y}{\partial K} > 0 \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} < 0$
   - $\frac{\partial Y}{\partial N} > 0 \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial N^2} < 0$

   Beide Inputfaktoren haben stets positive (erste partielle Ableitung > 0) aber abnehmende (zweite partielle Ableitung < 0) Grenzerträge. Das bedeutet: Eine zusätzliche Einheit Kapital bei fixer Beschäftigtenzahl wird den Output immer steigern, aber für jede zusätzliche Einheit Kapital fällt der Outputzuwachs kleiner aus als bei der vorherigen.

   iii.
   - $(x \cdot K)^{0,5}(x \cdot N)^{0,5} = \left(x^2 \cdot KN\right)^{0,5} = x \cdot K^{0,5}N^{0,5} = x \cdot Y$ konstante Skalenerträge
   - $(x \cdot K)^{0,5}x \cdot N = x^{1,5} \cdot K^{0,5}N \neq x \cdot Y$ keine konstanten Skalenerträge



   (b)

   (c) i. Zunächst bestimmen wir $\frac{Y}{N}\left(\frac{K}{N}\right)$

$$\frac{Y}{N} = \frac{K^\alpha N^{1-\alpha}}{N} = \left(\frac{K}{N}\right)^\alpha$$

   Mit dieser Vorbereitung können wir nun $\frac{K^*}{N}$ bestimmen

$$\begin{aligned}
\Delta\frac{K}{N} &= \frac{I}{N} - \delta\frac{K}{N} = 0 \quad \text{Definition des Steady State} \\
\Leftrightarrow \frac{I}{N} &= \delta\frac{K}{N} \\
\Leftrightarrow s\frac{Y}{N} &= \delta\frac{K}{N} \\
\Leftrightarrow s\left(\frac{K}{N}\right)^\alpha &= \delta\frac{K}{N} \\
\Leftrightarrow \frac{s}{\delta} &= \frac{KN^\alpha}{NK^\alpha} = \frac{K^{1-\alpha}}{N^{1-\alpha}} = \left(\frac{K}{N}\right)^{1-\alpha} \\
\Leftrightarrow \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} &= \frac{K^*}{N}
\end{aligned}$$

   ii.

$$\begin{aligned}
\frac{Y^*}{N} &= \left(\frac{K^*}{N}\right)^\alpha = \left(\left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^\alpha = \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\
\frac{C^*}{N} &= (1-s)\frac{Y^*}{N} = (1-s)\left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}
\end{aligned}$$

iii. 1. $\frac{K^*}{N} = 5,32 \quad \frac{Y^*}{N} = 1,95 \quad \frac{C^*}{N} = 1,37$
   2. $\frac{K^*}{N} = 12,28 \quad \frac{Y^*}{N} = 4,5 \quad \frac{C^*}{N} = 3,15$
   3. $\frac{K^*}{N} = 150,88 \quad \frac{Y^*}{N} = 55,32 \quad \frac{C^*}{N} = 38,73$

iv. Je größer α (die Gewichtung des Kapitals in der Produktionsfunktion), desto höher sind die Kapitalintensität sowie Produktion und Konsum je Beschäftigten im Steady-State. In einer Grafik mit verschiedenen α lässt sich der Grund dafür einfach erkennen: Je höher α, desto schneller steigt die Produktion je Beschäftigten bei einer Erhöhung der Kapitalintensität an.

Hauptteil - Lösung

Aufgabe 1 - Solow-Wachstumsmodell

1. (a) $\delta \cdot \frac{K}{N}$

   (b) $\frac{Y}{N}\left(\frac{K}{N}\right) = \frac{K^{0,5}N^{0,5}}{N} = K^{0,5}N^{-0,5} = \left(\frac{K}{N}\right)^{0,5} = \sqrt{\frac{K}{N}}$

   (c) $\frac{I}{N}\left(\frac{K}{N}\right) = \frac{S}{N} = s\frac{Y}{N} = s\sqrt{\frac{K}{N}}$

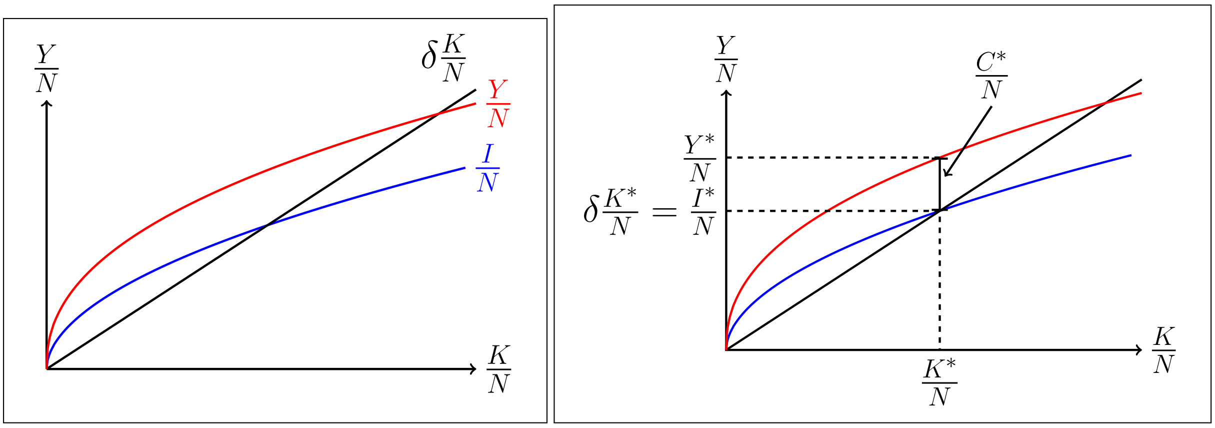


Abb. 1: 1.&2.

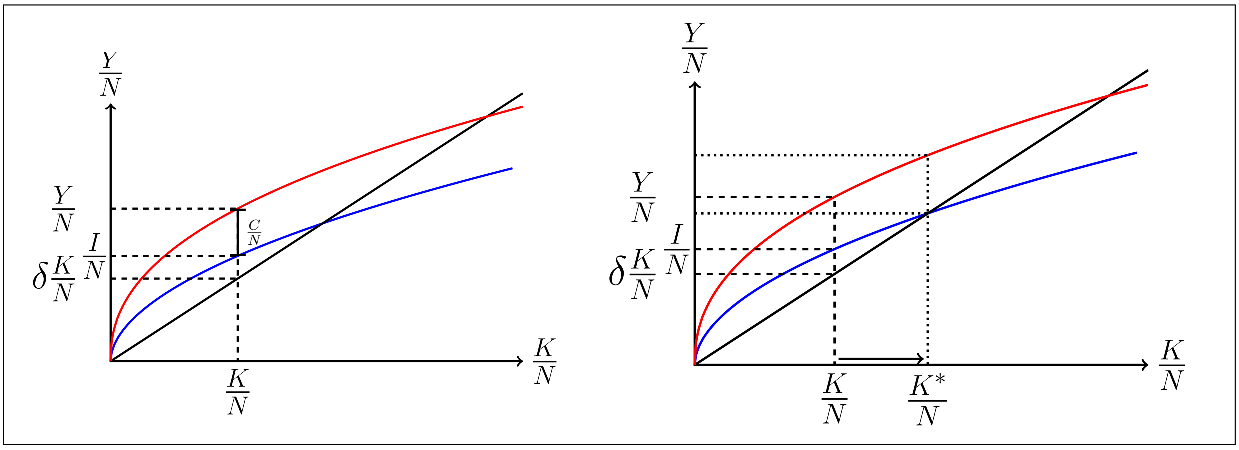


Abb. 2: 2.a&b

2. (a)

   (b) In Abb. 2 kann man erkennen, dass wenn

$$\frac{K}{N} < \frac{K^*}{N}$$

die Investitionen je Beschäftigen über den Abschreibungen je Beschäftigten liegen:

$$\frac{I}{N} > \delta\frac{K}{N}$$

Das bedeutet, dass jedes Jahr pro Beschäftigten mehr Kapital durch Investitionen hinzukommt als abgeschrieben wird. Damit ist die Veränderung der Kapitalintensität über mehrere Perioden hinweg positiv:

$$\Delta\frac{K}{N} = \frac{I}{N} - \delta\frac{K}{N} > 0$$

Die Kapitalintensität nimmt solange zu, bis der Steady State erreicht ist (Dieser Punkt ist ja gerade definiert durch: $\Delta K/N = 0$, dort endet also die Zunahme).

Damit verbunden ist ein Anstieg von Y/N, der Produktion je Beschäftigten. Unter unserer Annahme einer gleichbleibenden Beschäftigtenzahl bedeutet dies: Wirtschaftswachstum. Die in Aufgabe 2a beschriebene Situation stellt im Solow-Wachstumsmodell also eine Erklärung für Wirtschaftswachstum dar. In der nächsten Aufgabe untersuchen wir ein Beispiel, wie es dazu kommen kann, dass sich ein Land in dieser Situation befindet: durch einen Anstieg der Sparquote s.

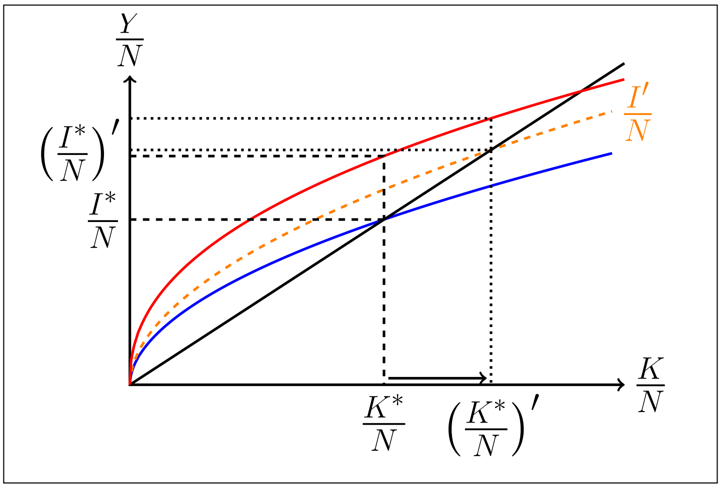


Abb. 3: 2.c

(c) Steigt die Sparquote an auf s', so ergibt sich eine neue Kurve für die Investitionen je Beschäftigten I'/N (orange gestrichelt), die über der alten Investitonskurve (blau) aber weiterhin unterhalb der Produktionskurve Y/N (rot) liegt. Dies liegt daran, dass gilt:

$$\frac{I}{N} = s\frac{Y}{N} \quad \text{mit } 0 < s < s' < 1$$

Betrachtet man nun I'/N und die Kapitalintensität K^*/N des alten Steady State, so stellt dies die gleiche Situation wie in Aufgabe 2a dar. Es folgt also der gleiche Anpassungsprozess.

3. (a) $Y(25,9) = 15 \quad \frac{K}{N} = \frac{25}{9} = 2,78 \quad \frac{Y}{N} = \frac{15}{9} = 1,67$

(b) Da wir weiterhin die selbe Produktionsfunktion betrachten wie zu Beginn, gilt auch weiterin:

$$\frac{Y}{N} = \sqrt{\frac{K}{N}} \quad \text{und} \quad \frac{I}{N} = s\sqrt{\frac{K}{N}}$$

Dies wird uns in der folgenden formalen Berechnung des Steady State bei der Vereinfachung der Terme helfen. Zunächst berechnen wir die Kapitalintensität im Steady State allgemein, also abhängig von den Parametern s und δ, ohne bereits konkrete Werte einzusetzen.

$$\begin{aligned}
\Delta\frac{K}{N} &= 0 \quad \text{Definition des Steady State} \\
\Rightarrow \frac{I}{N} &= \delta\frac{K}{N} \\
\Leftrightarrow s\sqrt{\frac{K}{N}} &= \delta\frac{K}{N} \\
\Leftrightarrow \frac{s}{\delta} &= \frac{KN^{0,5}}{NK^{0,5}} = \left(\frac{K}{N}\right)^{0,5} \\
\Leftrightarrow \left(\frac{s}{\delta}\right)^2 &= \frac{K^*}{N}
\end{aligned}$$

Daraus folgen:

$$\frac{Y^*}{N} = \sqrt{\frac{K^*}{N}} = \frac{s}{\delta}$$
$$\frac{C^*}{N} = (1-s)\frac{Y^*}{N} = (1-s)\frac{s}{\delta}$$

Für $\delta = 9\%$ und $s = 20\%$ liegt der Steady State bei:
$\frac{K^*}{N} = 4,94 \quad \frac{Y^*}{N} = 2,22 \quad \frac{C^*}{N} = 1,78$

(c) i. $\frac{K^*}{N} = 11,11 \quad \frac{Y^*}{N} = 3,33 \quad \frac{C^*}{N} = 2,33$
ii. $\frac{K^*}{N} = 79,01 \quad \frac{Y^*}{N} = 8,89 \quad \frac{C^*}{N} = 1,78$

(d) Die Sparquote $s = 30\%$ erscheint gesellschaftlich am wünschenswertesten, da hier der höchste Konsum pro Beschäftigten erreicht wird. Eine höhere Produktion pro Beschäftigten (also auch eine höhere Gesamtproduktion, bzw. höheres BIP) wäre zwar möglich, wenn die Sparquote noch höher läge, doch würde dies für jeden Beschäftigten individuell einen Rückgang des Konsums bedeuten. Das liegt daran, dass in diesem Fall enorm viel gespart werden müsste, um die nötigen Investitionen zu tätigen, um die Abschreibungen auszugleichen. Es bliebe dann kaum noch Einkommen für den Konsum übrig (bildlich vorstellbar bei einer Sparquote von $s = 100\% \Rightarrow C/N = 0$).